数 学 Ⅰ・A 問 題 例

問題1

次の **問 1** 〜 **問 5** に答えよ。答を導く過程も簡潔に記せ。

問 1　$3x^4+2x^2-5$ を因数分解せよ。

問 2　連立不等式 $\begin{cases} 3-2x<x+2 \\ 2x-3<x+2 \end{cases}$ を解け。

問 3　① $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ を計算せよ。

② $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

問 4　① $\dfrac{5}{2}<\sqrt{m}<3$ を満たす奇数 m を求めよ。

② ① の m について，$\dfrac{3}{3-\sqrt{m}}$ の整数部分を求めよ。

問 5　ＣＯＦＦＥＥの６個の文字を１列に並べる。

① 全部で何通りの並べ方があるか.

② E は隣り合っているが, F は隣り合っていない並べ方は何通りあるか.

問題2

2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + a - 1$ のグラフを C とする。

次の **問 1** 〜 **問 4** に答えよ。答を導く過程も記せ。

問 1　C の頂点の座標を求めよ。

問 2　C が xy 座標の原点 $(0,\ 0)$ を通るときの a の値を求めよ。

問 3　C と x 軸が 2 個の共有点をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

問 4　a が **問 3** で求めた範囲を動くとき，2 個の共有点を結ぶ線分の長さを a の式で表し，その最大値を求めよ。

問題3

円に内接する四角形 ABCD において,

$$\mathrm{AB} = 1, \quad \mathrm{AD} = 3, \quad \angle \mathrm{A} = 60^\circ, \quad \mathrm{BC} = \mathrm{CD}$$

とする。次の **問 1** 〜 **問 4** に答えよ。答を導く過程も記せ。

問 1　三角形 ABD の面積を求めよ。

問 2　対角線 BD の長さを求めよ。

問 3　外接円の半径を求めよ。

問 4　三角形 BCD の面積を求めよ。

数 学 I・A 解 答

問題 1

問 1 $3x^4+2x^2-5=(3x^2+5)(x^2-1)=(3x^2+5)(x-1)(x+1)$

答 $(3x^2+5)(x-1)(x+1)$

問 2 $3-2x<x+2,\ 2x-3<x+2 \iff 3x>1,\ x<5 \iff \dfrac{1}{3}<x<5$

答 $\dfrac{1}{3}<x<5$

問 3 ① $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{5}^2=2+3+2\sqrt{6}-5=2\sqrt{6}$

② $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{12}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

答 ① $2\sqrt{6}$ ② $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

問 4 ① $\dfrac{5}{2}<\sqrt{m}<3 \iff \dfrac{25}{4}=6\dfrac{1}{4}<m<9.\ \therefore\ m=7,8.$ m は奇数より $m=7.$

② $m=7.$ $\dfrac{3}{3-\sqrt{m}}=\dfrac{3}{3-\sqrt{7}}=\dfrac{3(3+\sqrt{7})}{2}=\dfrac{9+3\sqrt{7}}{2}.$

$\dfrac{5}{2}<\sqrt{7}<3$ より， $\dfrac{33}{4}=8\dfrac{1}{4}<\dfrac{9+3\sqrt{7}}{2}<9.$ よって整数部分は 8.

答 ① 7 ② 8

問題１　問５ COFFEE の６ 個の文字を一列に並べる.

① 全部で何通りの並べ方があるか.

② E は隣り合っているが，F は隣り合っていない並べ方は何通りあるか.

答　① E と F が２個ずつ，他は１個ずつなので，$\dfrac{6!}{2!2!} = 180.$

② 隣り合う E は１つと数えると $\dfrac{5!}{2!} = 60.$　これから F も隣り合っている

場合の数 $4!$ を引けば, $60 - 24 = 36.$

問題 2

問 1 $y=x^2-2ax+2a^2+a-1=(x-a)^2+a^2+a-1$ より,

頂点の座標は $(a,\ a^2+a-1)$.

答　$(a,\ a^2+a-1)$

問 2　$(x,y)=(0,0)$ のとき, $0=2a^2+a-1=(2a-1)(a+1)$ より, $a=\dfrac{1}{2},\ -1$.

答　$\dfrac{1}{2},\ -1$

問 3　頂点の y 座標が負のとき, または, 判別式 D が正のとき, C と x 軸が 2 個の共有点をもつので, $a^2+a-1<0$ より, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

答　$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

問 4 2 個の共有点の x 座標は $x^2-2ax+2a^2+a-1=0$ の解 $x=a\pm\sqrt{-(a^2+a-1)}$ なので, 線分の長さはその差の絶対値である $2\sqrt{-(a^2+a-1)}=2\sqrt{-a^2-a+1}$.

$-a^2-a+1=-\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\leqq\dfrac{5}{4}$ より, $2\sqrt{-a^2-a+1}\leqq\sqrt{5}$.

よって, 最大値は $\sqrt{5}$ で, $a=-\dfrac{1}{2}$ のときにとる.

答　長さ $2\sqrt{-a^2-a+1}$　　　　最大値 $\sqrt{5}$

問題 3

問 1 $\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin A = \dfrac{1}{2} * 1 * 3 * \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

答 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

問 2 $\mathrm{BD}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A = 1^2 + 3^2 - 2 * 1 * 3 * 1/2 = 7$. $\mathrm{BD} = \sqrt{7}$.

答 $\sqrt{7}$

問 3 $2R = \dfrac{\mathrm{BD}}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$. $R = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

答 $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

問 4 $\angle\mathrm{CBD} = \angle\mathrm{CDB} = 30^\circ$. 底辺 $\mathrm{BD} = \sqrt{7}$. 高さ $= \dfrac{\mathrm{BD}}{2}\tan 30^\circ$.

$\triangle\mathrm{BCD} = \dfrac{\mathrm{BD}^2}{4}\tan 30^\circ = \dfrac{7}{4}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{7\sqrt{3}}{12}$

答 $\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$